УДК 519.633

Т. Е. Коровкина

О МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СОПРЯЖЕНИЯ

Исследуются свойства граничного оператора и доказывается сходимость метода разделения области для параболической граничной задачи сопряжения.

В работе исследуются свойства граничного оператора и доказывается сходимость метода разделения области для параболической задачи сопряжения.

1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — область с гладкой границей S, $\overline{\Omega^+} \subset \Omega$ — строго внутренняя подобласть с гладкой границей γ и внешней нормалью n, а $\Omega^- = \Omega \setminus \overline{\Omega^+}$. Рассмотрим в области $Q = \Omega \times (0, T)$ граничную задачу

$$\begin{gathered} u_t^{\pm}(x, t) + \mathscr{L}^{\pm} u^{\pm}(x, t) = f^{\pm}(x, t), \quad u^{\pm} \in Q^{\pm}, \\ [u]_\Gamma = \left[\frac{\partial u}{\partial \nu}\right]_\Gamma = 0, \quad u^-|_\Sigma = g(t), \quad u^{\pm}|_{t=0} = \varphi^{\pm}(x). \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\mathscr{L}^{\pm} u^{\pm} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^{\pm}(x, t)\frac{\partial u^{\pm}}{\partial x_j}\right) + b_j^{\pm}(x, t)\frac{\partial u^{\pm}}{dx_j} + a^{\pm}(x, t)\, u^{\pm}$ — эллиптический оператор; $\Sigma = S \times (0, T)$, $\Gamma = \gamma \times (0, T)$, $\frac{\partial}{\partial \nu}$ — производная по конормали к Γ; $[u]_\Gamma = (u^+ - u^-)_\Gamma$.

Предполагается, что коэффициенты оператора $\mathscr{L}$ — гладкие, вообще говоря, комплекснозначные функции, $f^{\pm}$, $g^{\pm}$ и $\varphi^{\pm}$ — достаточно гладкие функции на $Q^{\pm}$, Σ и $\Omega^{\pm}$ соответственно удовлетворяющие параболическим условиям согласования на S и γ.

Будем предполагать также выполненным условие

$$\operatorname{Re} a(u, u) \geqslant \xi \| u \|^2_{H^1(\Omega)}, \quad u \in H_0^1(\Omega), \quad \xi > 0, \tag{2}$$

где

$$a(u, v) = \int\limits_\Omega \left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar v}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\bar v + a u \bar v\right) dx,$$

а H^r и H_0^r, $r \in \mathbb{R}$ — пространства Соболева.

2. Рассмотрим линейный оператор K, действующий по формуле: $K\psi = [w]_\Gamma$, где $w^{\pm}$ — решение краевых задач

$$\mathscr{L}^{\pm} w^{\pm} = 0, \quad \left.\frac{\partial w^{\pm}}{\partial \nu^{\pm}}\right|_\Gamma = \psi, \quad w^-|_\Sigma = 0, \quad w^{\pm}|_{t=0} = 0. \tag{3}$$

Свойства граничного оператора K устанавливаются в следующей лемме.

Лемма. Оператор K является вполне непрерывным секториальным вольтерровым оператором в $L^2(\Gamma)$ с нулевым ядром. Кроме того, при $r \geqslant -\frac{1}{4}$, $r \neq$ натуральное $+ \frac{3}{4}$ и $2r \neq$ натуральное, оператор K изоморфно отображает $H_{(0)}^{2r,r}(\Gamma)$ на $H_{(0)}^{2r+1,r+1/2}(\Gamma)$ и имеет место неравенство

$$c_1 \| \psi \|_{H^{2r,r}(\Gamma)} \leqslant \| K\psi \|_{H^{2r+1,r+1/2}(\Gamma)} \leqslant c_2 \| \psi \|_{H^{2r,r}(\Gamma)}, \tag{4}$$

где $H_{(0)}^{2r,r}(\Gamma)$ состоит из функций, являющихся элементами пространств Соболева $H^{2r,r}(\Gamma)$ и удовлетворяющих условиям согласования с нулем.

Доказательство. Пусть $\psi \in H^{2r,r}(\Gamma)$, $r \geqslant -\frac{1}{4}$, $r \neq$ натуральное $+\frac{3}{4}$, $2r \neq$ натуральное. Второе неравенство в (4) следует из результатов [1] о разрешимости краевой задачи (3) и теоремы о следах функций. Действительно,

$$\begin{gathered} \| K\psi \|_{H^{2r+1,r+1/2}(\Gamma)} \leqslant \| w^+ \|_{H^{2r+1,r+1/2}(\Gamma)} + \| w^- \|_{H^{2r+1,r+1/2}(\Gamma)} \leqslant \\ \leqslant c \| w \|_{H^{2(r+3/4),r+3/4}(Q^{\pm})} \leqslant c \| \psi \|_{H^{2r,r}(\Gamma)}. \end{gathered}$$

Отсюда и из компактности вложения $H^{2r+1,r+1/2}(\Gamma) \subset H^{2r,r}(\Gamma)$ вытекает полная непрерывность оператора K в $H^{2r,r}(\Gamma)$, в частности в $L^2(\Gamma)$. Отметим, что по построению оператора, функции вида $K\psi$ удовлетворяют условиям согласования, включенными нами в определение $H_{(0)}^{2r,r}(\Gamma)$.

Пусть теперь $K\psi = h$, $\psi = \left.\frac{\partial w^{\pm}}{\partial \nu^{\pm}}\right|_\Gamma$, а $w^{\pm}$ — решение задачи сопряжения

$$w_t^{\pm} + \mathscr{L}^{\pm} w^{\pm} = 0, \quad [w]_\Gamma = h, \quad \left[\frac{\partial w}{\partial \nu}\right]_\Gamma = 0, \quad w^-|_\Sigma = 0, \quad w^{\pm}|_{t=0} = 0. \tag{5}$$

Из результатов [2] о разрешимости задачи (5) и теоремы о следах функций [1] имеем

$$c_1\|\psi\|_{H^{2r,r}(\Gamma)} \leqslant \|w\|_{H^{2(r+3/4),r+3/2}(Q\pm)} \leqslant c\|h\|_{H^{2r+1,r+1/2}(\Gamma)}$$

и справедливость первого неравенства в (4).

Покажем, что оператор K — вольтерров и не имеет ядра. Это значит, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ уравнение $K\psi = \lambda\psi$ имеет только тривиальное решение $\psi \equiv 0$. Действительно, $[w]_\Gamma = k\psi = \lambda\psi = \lambda \left.\frac{\partial w^\pm}{\partial\nu^\pm}\right|_\Gamma$. Поэтому однородная задача сопряжения

$$w_t^\pm + \mathscr{L}^\pm w^\pm = 0, \quad \left[\frac{\partial w}{\partial\nu}\right]_\Gamma = 0, \quad [w]_\Gamma = \lambda \left.\frac{\partial w^\pm}{\partial\nu^\pm}\right|_\Gamma, \quad w^-|_\Sigma = 0,$$

$$w^\pm|_{t=0} = 0$$

имеет только тривиальное решение $w \equiv 0$, и, следовательно, $\psi = \left.\frac{\partial w^\pm}{\partial\nu^\pm}\right|_\Gamma = 0$.

Установим секториальность оператора K (определение секториальности, см., например, [3]). Пусть $w^\pm$ — решение задачи (3). Справедливо тождество

$$0 \equiv \int_0^T\int_\Omega (\mathscr{L}w + w_t)\,\bar{w}\,dxdt = \int_0^T a(w,\ w)\,dt - \int_0^T\int_\gamma \frac{\partial w^+}{\partial\nu^+}[\bar{w}]_\Gamma\,dxdt +$$

$$+ \int_0^T\int_\Omega w_t\bar{w}\,dxdt. \tag{6}$$

Из (6) и определения K

$$\operatorname{Re}(\psi,\ e^{i\beta}K\psi) \geqslant \operatorname{Re}\left(e^{-i\beta}\int_0^T a(w,\ w)\,dt\right) + \operatorname{Re}\left(e^{-i\beta}\int_0^T\int_\Omega w_t\bar{w}\,dxdt\right) \geqslant$$

$$\geqslant \operatorname{Re}\left(\int_0^T a(w,\ w)\,dt + \int_0^T\int_\Omega w_t\bar{w}\,dxdt\right)\cos\beta - \left(\left|\int_0^T\int_\Omega w_t\bar{w}\,dxdt\right| + \right. \tag{7}$$

$$\left. + \int_0^T |a(w,\ w)|\,dt\right)|\sin\beta|.$$

При оценке интегралов в правой части (7) воспользуемся следующими соотношениями. Так как $\operatorname{Re} w_t\bar{w} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|w|^2$, то

$$\operatorname{Re}\int_0^T\int_\Omega w_t\bar{w}\,dxdt = \frac{1}{2}\int_\Omega |w(x,\ T)|^2\,dx \geqslant 0. \tag{8}$$

Далее, справедливо неравенство

$$\left|\int_0^T w_t\bar{w}\,dxdt\right| \leqslant c\|w\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}. \tag{9}$$

Действительно, из (6) имеем

$$\left|\int_0^T\int_\Omega w_t\bar{w}\,dxdt\right| \leqslant \left|\int_0^T\int_\gamma \frac{\partial w^+}{\partial\nu^+}[\bar{w}]_\Gamma\,dxdt\right| + \int_0^T |a(w,\ w)|\,dt. \tag{10}$$

Оценим первый интеграл в (10):

$$\left|\int_0^T\int_\gamma \frac{\partial w^+}{\partial\nu^+}[\bar{w}]_\Gamma\,dxdt\right| \leqslant \left\{\int_0^T \left\|\frac{\partial W^+}{\partial\nu^+}\right\|^2_{H^{-1/2}(\gamma)} dt\right\}^{1/2} \left\{\int_0^T \|[w]_\Gamma\|^2_{H^1 l_2(\gamma)}\,dt\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c\left\{\int_0^T \|w\|^2_{H^1(\Omega)}\,dt\right\}^{1/2} \left\{\int_0^T (\|w^+\|^2_{H^{1/2}(\gamma)} + \|w^-\|^2_{H^{1/2}(\gamma)})\,dt\right\}^{1/2} \leqslant c\|w\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}.$$

Отсюда и из очевидного неравенства

$$\int_0^T |a(w, w)|\, dt \leqslant c \|w\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \tag{11}$$

получаем оценку (9).

Итак, из (7), используя (2), (8), (9) и (11), получаем

$$\operatorname{Re}(\psi, e^{i\beta}K\psi) \geqslant (\xi\cos\beta - c|\sin\beta|)\|w\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}. \tag{12}$$

Выберем теперь $\beta_0 \in (0, \pi/2)$ настолько малым, чтобы $\xi_0 = \xi\cos\beta - c|\sin\beta| \geqslant 0$ для $|\beta| \leqslant \beta_0$. Тогда из (12) будет следовать секториальность оператора K. Лемма доказана.

3. В соответствие с методом разделения области [4] для некоторого $\alpha > 0$ в областях $Q^{\pm}$ рассмотрим краевые задачи

$$\begin{gathered} u^{\pm}_{N_t} + \mathscr{L}^{\pm}u^{\pm}_N = f^{\pm}, \quad u^-_N|_\Sigma = g, \quad u^{\pm}|_{t=0} = \varphi^{\pm}, \\ \left.\frac{\partial u^{\pm}_N}{\partial\gamma^{\pm}}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial u^{\pm}_{N-1}}{\partial\gamma^{\pm}}\right|_\Gamma - \alpha(u^+_{N-1} - u^-_{N-1})_\Gamma, \quad N = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{13}$$

где $u_N = \sum\limits_{k=1}^{N} v_k$, а v_k — решения краевых задач

$$\begin{gathered} v^{\pm}_{0_t} + \mathscr{L}^{\pm}v^{\pm}_0 = f^{\pm}, \quad v^-_0|_\Sigma = g, \quad v^{\pm}_0|_{t=0} = \varphi, \quad \left.\frac{\partial v^{\pm}_0}{\partial\nu^{\pm}}\right|_\Gamma = \psi, \\ v^{\pm}_{1_t} + \mathscr{L}^{\pm}v^{\pm}_1 = 0, \quad v^-_1|_\Sigma = 0, \quad v^{\pm}_1|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial v^{\pm}_1}{\partial\nu^{\pm}}\,|\,\Gamma = -\alpha[v_0]_\Gamma, \\ v^{\pm}_{kt} + \mathscr{L}^{\pm}v^{\pm}_k = 0, \quad v^-_k|_\Sigma = 0, \quad v^{\pm}_k|_{t=0} = 0, \\ \left.\frac{\partial v^{\pm}_k}{\partial\nu^{\pm}}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial v^{\pm}_{k-1}}{\partial\nu^{\pm}}\right|_\Gamma - \alpha[v_{k-1}]_\Gamma, \quad k \geqslant 2, \end{gathered} \tag{14}$$

где ψ — произвольная функция на Γ.

Пусть $w = u - u_N$, где $u = (u^+, u^-)$ — решение задачи (1), а u_N — решение задачи (13). Тогда w удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\begin{gathered} w_t + \mathscr{L}w = 0, \quad [w]_\Gamma = -\frac{1}{\alpha}(I - \alpha K)^N K^{-1}[v_1]_\Gamma, \\ \left[\frac{\partial w}{\partial\nu}\right]_\Gamma = 0, \quad w^-|_\Sigma = 0, \quad w|_{t=0} = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Из (15) видно, что $u_N \to u$, если $[w]_\Gamma \to 0$ в некоторых функциональных пространствах.

Справедливо следующее утверждение, являющееся следствием леммы 2 из [3].

Лемма. Пусть K — ограниченный секториальный вольтерров оператор в гильбертовом пространстве H, $r > 0$ — целое, $\theta \in (0, r)$ и $\alpha > 0$ — произвольны. Тогда для $\alpha \in (0, \alpha_0)$ справедлива оценка

$$\|(I - \alpha K)^N K^r\| \leqslant \frac{c(r, \theta, a_0, \beta_0)}{\alpha^r N^{r-\theta}}. \tag{16}$$

4. Сходимость метода разделения области устанавливаются в следующей теореме.

Теорема. Пусть $f^{\pm} \in H^{2k-2,k-1}(Q^{\pm})$, $\varphi^{\pm} \in H^{2k-2}(\Omega^{\pm})$, $\psi \in H^{2k-3/2,k-3/4}(\Gamma)$, $g \in H^{2k-1/2,k-1/4}(\Sigma)$ и $\alpha \in (0, \alpha_0)$, где $k > 0$ — целое, $\alpha_0 > 0$ — произвольно. Тогда для любого $\theta \in (0, 2k - m - 1)$, где m — целое, $k > (m+1)/2$, справедлива оценка

$$\begin{gathered} \|u - u_N\|_{H^{m,m/2}(Q^{\pm})} \leqslant \frac{c(m, k, \theta, \alpha_0, \beta_0)}{\alpha^{2k-m-1}N^{2k-m-\theta-1}}\{\|f^+\|_{H^{2k-2,k-1}(Q^+)} + \\ + \|f^-\|_{H^{2k-2,k-1}(Q^-)} + \|\varphi^+\|_{H^{2k-1}(\Omega^+)} + \|\varphi^-\|_{H^{2k-1}(\Omega^-)} + \\ + \|g\|_{H^{2k-1/2,k-1/4}(\Sigma)} + \|\psi\|_{H^{2k-3/2,k-3/4}(\Gamma)}\}. \end{gathered} \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $\alpha_0 > 0$ — произвольно и $\theta \in (0, q - p - 1)$, $q > p + 1$. Тогда в силу (16)

$$\|(I - \alpha K)^N K^{-p-1} y\|_{L^2(\Gamma)} \leqslant \|K^{-q} y\|_{L^2(\Gamma)} \frac{c(q, p, \theta, \alpha_0, \beta_0)}{\alpha^{q-p-1} N^{q-p-\theta-1}}. \quad (18)$$

Так как для достаточно малого $\varepsilon > 0$ оператор K непрерывно действует из $H_{(0)}^{1+\varepsilon, \frac{1+\varepsilon}{2}}(\Gamma)$ в $L^2(\Gamma)$ и при этом

$$\|K^{-n} h\|_{L^2(\Gamma)} \leqslant c \|h\|_{H^{n+\varepsilon, \frac{n+\varepsilon}{2}}(\Gamma)}, \quad (19)$$

в то же время K^m непрерывно действует из $H^{-\varepsilon, -\varepsilon/2}(\Gamma)$ в $H_{(0)}^{m-\varepsilon, \frac{m-\varepsilon}{2}}(\Gamma)$ и

$$\|K^m h\|_{H^{m-\varepsilon, \frac{m-\varepsilon}{2}}(\Gamma)} \leqslant c \|h\|_{H^{-\varepsilon, -\varepsilon/2}(\Gamma)} \leqslant c \|h\|_{L^2(\Gamma)},$$

то

$$\|\psi\|_{H^{m-\varepsilon, \frac{m-\varepsilon}{2}}(\Gamma)} \leqslant c \|K^{-m} \psi\|_{L^2(\Gamma)}. \quad (20)$$

Пусть $p = m$ и $q = 2k$, где m и k — натуральные. Тогда из (18) с учетом (19) и (20) получим

$$\|(I - \alpha K)^N K^{-1} y\|_{H^{m-\varepsilon, \frac{m-\varepsilon}{2}}(\Gamma)} \leqslant \|y\|_{H^{2k+\varepsilon, k+\varepsilon/2}(\Gamma)} \frac{c(k, m, \theta, \alpha_0, \beta_0)}{\alpha^{2k-m-1} N^{2k-m-\theta-1}}. \quad (21)$$

Далее из результатов [2] следует разрешимость задачи (15) и оценка

$$\|w\|_{H^{m,m/2}(Q^{\pm})} \leqslant \frac{c}{\alpha} \|(I - \alpha K)^N K^{-1} [v_1]_\Gamma\|_{H^{m-1/2, m/2-1/4}(\Gamma)}. \quad (22)$$

Так как $[v_1]_\Gamma = -\alpha K [v_0]_\Gamma$, то из (22) с использованием второго неравенства в (4), (21) и результатов о разрешимости задачи (14), получаем исходную оценку (17). Теорема доказана.

1. *Lions I.-L., Magenes E.* Non-homogeneous boundary value problems and applications. V. 2.— Berlin : Springer.— 1972.— 242 p.
2. *Житарашу Н. В.* О постановке и разрешимости общих параболических граничных задач сопряжения в пространствах обобщенных функций // Дифференц. уравнения и динамические системы.— 1985.— Вып. 8.— С. 74—78.
3. *Коровкина Т. Е.* О сходимости метода разделения областей для эллиптических задач сопряжения // Укр. мат. журн.— 1989.— 41, № 8.— С. 1137—1141.
4. *Маттеева Э. Й., Пальцев Б. В.* О разделении областей при решении краевых задач для уравнения Пуассона в областях сплошной формы // Журн. вычислит. математики и мат. физики.— 1973.— 13, № 6.— С. 1441—1452.

Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк

Получено 12.06.89